Α′ Μέρος Τεστ 7, Μιγαδικές Συναρτήσεις Ι

Διάρκεια 90 Λεπτά

Στοιχειοθεσία: Δήμογλου Κωνσταντίνος, Μαθηματικός (Msc)

Θέμα 1

(i) Να υπολογισθεί η τιμή του ολοκληρώματος $\displaystyle\int_\gamma \frac{dz}{z}$, όπου γ είναι μία λεία καμπύλη με αρχή το 1, πέρας το $1+i$ και τέμνει τον αρνητικό πραγματικό ημιάξονα ακριβώς μία φορά.

(ii) Έστω τυχόν $r>0$, το θετικό προσανατολισμένο ημικύκλιο με παραμετρική παράσταση $\gamma_r(t)=re^{it},\ t\in[0,\pi]$ και η συνάρτηση $f(z)=\dfrac{1}{z^4+1}$. Αφού πρώτα δώσετε το σύνολο στο οποίο η f είναι ολόμορφη να αποδείξετε ότι

$$\lim_{r\to+\infty}\int_{\gamma_r} f(z)dz=0.$$

Θέμα 2

Να υπολογίσετε τα παρακάτω επικαμπύλια ολοκληρώματα:

(i) $J=\displaystyle\int_K \frac{\sinh 2z}{z}dz$, όπου K η απλή κλειστή θετικά προσανατολισμένη καμπύλη που ορίζει ένα τετράγωνο με πλευρές τα $x=2$, $x=-2$, $y=2$ και $y=-2$.

(ii) $I=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{C^+}\frac{\cos z}{z(z-\pi)^2}dz$ όπου C^+ κύκλος με θετική φορά διαγραφής ο οποίος δεν διέρχεται από τα σημεία 0 και π. Εξετάστε όλες τις πιθανές σχετικές θέσεις των 0 και π.

Θέμα 3 (Σωστό ή Λάθος;)

(i) Ισχύει: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} z^n \int_{\partial D(0,1)} \frac{dw}{w^{n+1}}=0,\ z\in D(0,1).$

(ii) Η εκθετική συνάρτηση $z\mapsto e^z,\ z\in\mathbb{C}$ είναι η μοναδική ακέραια συνάρτηση f τέτοια, ώστε $f(x)=e^x,\ x\in\mathbb{R}$ (δηλαδή, είναι η μοναδική ακέραια επέκταση της $f(x)=e^x,\ x\in\mathbb{R}$).

(iii) Η ακολουθία επικαμπυλίων ολοκληρωμάτων

$$I_n=\int_{\gamma_n}\left(1-\frac{2020i}{2021z}\right)^{-1}dz,\ n\in\mathbb{N},$$

όπου $\gamma_n(t)=i+\frac{1}{n}e^{2it},\ t\in[0,\pi], n=1,2,\dots,$ είναι τελικά σταθερή.

Θέμα 4

Έστω $f\colon\ \mathbb{C}\to\mathbb{C}$ μια ακέραια μιγαδική συνάρτηση.

(i) Αν $z_0\in\mathbb{C}$ και $R>0$ να αποδείξετε ότι

$$|f^{(n)}(z_0)|\le\frac{n!}{R^n}\|f\|_{\partial D(z_0,R)},\ n=0,1,\dots$$

(ii) Αν $|f(z)|\le|z|+2|z|^2$, για κάθε $x\in\mathbb{C}$ να αποδείξετε ότι $f(z)=\alpha_1 z+\alpha_2 z^2$, όπου $|\alpha_1|\le 1$ και $|\alpha_2|\le 2$.

ΚΑΛΗ ΤΥΧΗ!!